SESSION 2000

Concours d'admission en première année du Cycle de Formation d'Architectes de l'École Nationale Supérieure des Arts et Industries de Strasbourg

Épreuves écrites

MATHÉMATIQUES - EXERCICES

Durée : 4 heures - Coefficient : 4

Note : cette épreuve comprend quatre exercices que l'on pourra traiter dans l'ordre de son choix.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE I

Soit n un entier naturel.
On désigne par E_n l'espace vectoriel sur R des applications f de R dans R de la forme :

$$x \mapsto f(x) = e^x P(x),$$

où $x \mapsto P(x)$ désigne une application polynomiale de degré inférieur ou égal à n, à coefficients dans R.

1° Préciser une base de E_n et la dimension de E_n.

2° Soit D l'endomorphisme de E_n qui à toute application f de E_n associe l'application $D(f) = f'$ où f' est l'application dérivée de f.

i) Déterminer le noyau de D.
En déduire que D est bijective.

ii) Soit $g \in E_n$ et soit $f \in E_n$ tel que $D(f) = g$.
Soient P et Q les applications polynomiales telles que :

$$\forall x \in \mathrm{R},\ f(x) = e^x P(x) \text{ et } g(x) = e^x Q(x).$$

On suppose que les coefficients de Q sont des entiers relatifs.
Montrer qu'il en est de même des coefficients de P.

3° On suppose dans cette question que $n = 2$. On note $D^3 = D \circ D \circ D$.
Soit $g \in E_2$ définie par $x \mapsto g(x) = e^x x^2$.

i) Résoudre dans E_2 l'équation $D^3(h) = g$.

ii) Soit φ une application de R dans R, trois fois dérivable sur R, et vérifiant :

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0, \text{ et } \forall x \in \mathrm{R},\ \varphi^{(3)}(x) = e^x x^2.$$

Déterminer l'application φ.

4° L'entier n est à nouveau quelconque.
Soit $g \in E_n$ définie par $x \mapsto g(x) = e^x x^n$.
Soit φ une application de R dans R, $n+1$ fois dérivable sur R, et vérifiant : $\varphi^{(n+1)} = g$.

Montrer qu'il existe une application polynomiale A de degré inférieur ou égal à n, à coefficients réels, et une application polynomiale B de degré inférieur ou égal à n dont les coefficients sont des entiers relatifs telles que :

$$\forall x \in \mathrm{R},\ \varphi(x) = A(x) + e^x B(x).$$

EXERCICE II

On se propose de montrer que π est un nombre irrationnel.

Soient n un entier naturel non nul et P une application polynomiale définie sur R, à coefficients réels et de degré égal à $2n$.
Pour k entier naturel non nul, $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de P.
On convient que $P^{(0)} = P$.

On considère les applications F et G suivantes, définies sur R :

$$x \mapsto F(x) = P(x) - P''(x) + P^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n P^{(2n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(2k)}(x).$$

$$x \mapsto G(x) = F'(x) \times \sin x - F(x) \times \cos x.$$

1° Pour tout réel x, calculer $G'(x)$.

En déduire que : $\displaystyle\int_0^{\pi} P(x) \times \sin x\, dx = F(0) + F(\pi)$.

2° On suppose que π est un nombre rationnel. On pose $\pi = \frac{a}{b}$, $(a,b) \in \mathrm{N}^{*2}$.

On suppose, dans cette question, que l'application polynomiale P de degré $2n$ est la suivante :

$$x \mapsto P(x) = \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n .$$

i) Montrer que : $\forall j \in \mathrm{N},\ 0 \leq j < n,\ P^{(j)}(0) = 0$.

Pour j entier, $n \leq j \leq 2n$, préciser le coefficient de x^{n+j} de $P(x)$.

Calculer $P^{(n+j)}(0)$.

En déduire que $F(0)$ est un entier relatif.

ii) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ P(\pi - x) = P(x).$$

En déduire que $F(\pi)$ est un entier relatif.

iii) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathrm{N}^*}$ définie par :

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n \times \sin x \, dx$$

est une suite d'entiers strictement positifs.

iv) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathrm{N}^*}$ converge vers 0.

En déduire que π n'est pas un nombre rationnel.

EXERCICE III

Un billard a la forme d'un triangle ABC dont les angles sont tous aigus et dont les bandes $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ sont parfaitement réfléchissantes, ce qui veut dire que si une boule vient frapper une bande en un point M autre que A, B ou C, les trajectoires rectilignes d'avant l'impact et d'après l'impact sont symétriques par rapport à la normale à la bande en M.

Soient I, J et K les pieds des hauteurs respectivement issues de A, B et C.
Une boule suit une trajectoire rectiligne de I vers J.
Montrer qu'elle passe par K et revient en I.

On pourra utiliser le théorème de l'angle inscrit sous sa forme suivante : soit un cercle et soient P et Q deux points distincts de ce cercle. Alors, pour tous points R et S du cercle, distincts des points P et Q, et situés dans le même demi-plan de bord la droite (PQ), on a :

$$\widehat{PRQ} = \widehat{PSQ}.$$

EXERCICE IV

On rappelle que le volume d'un tétraèdre $ABCD$ est donné par la formule :

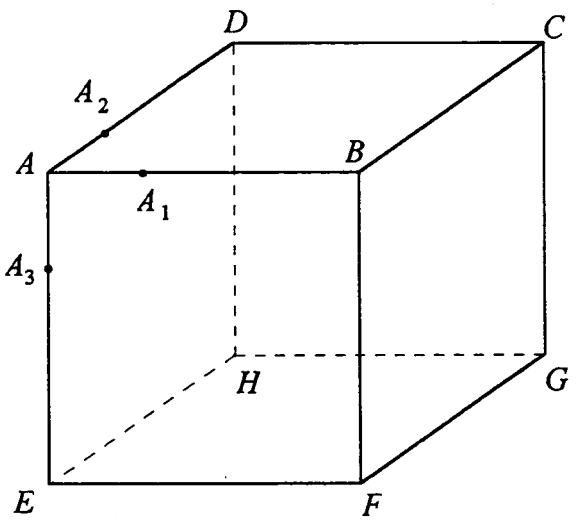
$$V = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times h_D ,$$

où S_{ABC} est l'aire de la face ABC et h_D la longueur du segment $[DD']$, D' étant la projection orthogonale de sommet D sur le plan (ABC).

Soit a un réel, $a > 0$, et soit $ABCDEFGH$ un cube de centre O et dont les arêtes ont pour longueur $2a$.

Soit x un réel, $0 < x \leq a$.

À partir du sommet A on porte sur les trois arêtes issues de A les points A_1, A_2 et A_3 tels que les longueurs des segments $[AA_1]$, $[AA_2]$ et $[AA_3]$ soient égales à x, selon la figure suivante :



1° Préciser la nature du triangle $A_1A_2A_3$.

Démontrer que le plan de ce triangle est perpendiculaire à la droite (OA).

Calculer x pour que le plan $(A_1A_2A_3)$ soit tangent à la sphère (S) de centre O et de rayon a.

2° On recommence la construction précédente à partir de chacun des sommets du cube, c'est-à-dire que l'on porte, sur les trois arêtes issues de chacun des sommets du cube, trois points dont la distance au sommet est égale à x.

On considère le polyèdre (P) obtenu à partir du cube en supprimant chacun des huit tétraèdres du type $AA_1A_2A_3$.

Préciser le nombre de faces de ce polyèdre.

Calculer le volume V_P de ce polyèdre en fonction de x.

On note V_S le volume de la sphère de centre O et de rayon a. On rappelle que $V_S = \frac{4}{3} \times \pi \times a^3$.

Résoudre et discuter selon les valeurs du réel k, $k > 0$, l'équation $V_P = k \times V_S$.